

TÜREV

SORU BANKASI

- KAZANIM ODAKLI KONU ÖZETİ
- YENİ NESİL SORULAR
- PRATİK YÖNTEMLER
- BASAMAKLI ZAMAN YÖNETİMİ
- ÇÖZÜM STRATEJİLERİ
- KADEMELİ TESTLER
- ÖSYM SORULARI

Fikret HEMEK
Kadir ÖNER
Abdullah AHMETOĞLU
Faruk KORKMAZ

VIDEO SORU ÇÖZÜMÜ

You
Tube

Hız ve Renk Uzaktan Eğitim Kanalı'nda
Konu anlatımı ve daha fazlası!



Kitabımızı Tanıyalım!

Konu Özeti

Kazanıma ait temel bilgilerin verildiği bölümdür.

Hızlı Bilgi - Pratik Yöntemler

Zaman kazandıracak ve soruyu kısa yoldan çözenizi sağlayacak bilgilerdir.

Basamaklı Zaman Yönetimi

Zaman yönetimi becerisi kazanmanız amacıyla her testin üzerine ideal çözüm süresi yazılmıştır.

Bilgi Kavrama Sorusu (BKS)

Kazanımın kavranması için verilen farklı zorluk düzeylerinde çözümlü sorulardır.

Kazanım Kavrama Testi (Yeşil Test)

Her kazanımın altında, sadece o kazanımla ilgili sorulardan oluşan testtir.

Bilgi Kavrama Testi (Mavi Test)

Konunun kavranması için temel düzey sorulardan oluşan testtir.

Bilgi Uygulama Testi (Kırmızı Test)

Konunun pekiştirilmesi için üst düzey sorulardan oluşan uygulama testidir.

ÖSYM Tarzı Test (Turuncu Test)

Konu ile ilgili ÖSYM'nin sorabileceği zorlukta hazırlanan karma testtir. Yeni nesil sorular ağırlıktadır.

Çıkış Sorular (Turkuaz Test)

Konu ile ilgili ÖSYM'nin sorduğu soruların bulunduğu testtir.



G. KOORDİNATÖR:
Harun DERİN



YAZARLAR:
Fikret HEMEK
Kadir ÖNER
Abdullah AHMETOĞLU
Faruk KORKMAZ



EDİTÖR:
Nuri SOYUDURU

Copyright © Bu kitabın her hakkı saklıdır.

Hangi amaçla olursa olsun,
bu kitabın tamamının ya da bir kısmının,
kitabı yayımlayan yayınevinin önceden
izni olmaksızın elektronik, mekanik, fotokopi
ya da herhangi bir kayıt sistemi ile çoğaltılması,
yayımlanması ve depolanması yasaktır.

ISBN: 978-605-7530-70-7

0409 - 2 - 21



www.hizrenk.com



hizrenk@isler.com.tr



[@hizveren](https://www.instagram.com/hizveren)

SUNUŞ

Sevgili Öğrenciler,

Hepiniz hedeflerinize ulaşmak için sınavlara giriyorsunuz. Bu sınavlara hazırlık süreci; uzun, yorucu ve sabır isteyen bir yolculuk. HIZ ve RENK YAYINCILIK olarak bu uzun yolculukta sizlerin destekçisi ve rehberi olmayı bir görev bilmekteyiz. Bu anlayışla hazırladığımız soru bankalarımızla, sınavlara hazırlık sürecinde başarınızı daha yukarılara taşımak ve istediğiniz hedefe sizleri ulaştırabilmek temel amacımızdır.

TÜREV SORU BANKASI, siz değerli öğrencilerimizi ÖSYM tarafından hazırlanan AYT sınavında çıkabilecek sorulara adapte edebilme düşüncesiyle oluşturulmuş eşsiz bir yardımcıdır. Kitabımızda 159 tanesi çözümlü ve 564 tanesi video çözümlü olmak üzere, toplam 723 soru bulunmaktadır.

Titiz bir çalışmanın ürünü olan TÜREV SORU BANKAMIZ, MEB'in müfredat programıyla ve ÖSYM'nin soru tarzlarıyla birebir uyumlu olup oluşturulan tüm testler ve sorular konu kavrama ve uygulama sırasına göre kademeli bir şekilde hazırlanmıştır.

Kitabın hazırlanmasında büyük emekleri geçen yazarlarımız Sayın Fikret HEMEK, Kadir ÖNER, Abdullah AHMETOĞLU ve Faruk KORKMAZ'a; kitaptaki soruları titizlikle inceleyen redakte ekibimizin değerli üyeleri: Doç. Dr. Gürhan İÇÖZ, Burcu ALTUNAL, Öner ÇELİKAN, Hülya BODUKCU, Dr. Saygın DİNÇER, Onur ÖZTÜRK, Duygu AYDOĞAN, N. Büşra YAVUZ, Mete AKAR, Çağdaş POLAT, Muhammet UYSAL, Mehmet ERTAŞ, Eda Nur ILDIZ, Uğur ÜLKÜ ve Sultan BÜYÜKHAN'a; editörümüz Nuri SOYUDURU'ya ve dizgi ve tasarım uzmanlarımız Raşit SAVAŞ ve Hacer ŞENGÜL'e teşekkür ederiz.

Başarılarınıza Hız ve Renk katabilmek dileğiyle...

HIZ VE RENK YAYINCILIK

İÇİNDEKİLER

TÜREV ALMA KURALLARI

Ortalama Değişim Oranı.....	5
Anlık Değişim Oranı.....	7
Türevin Tanımı	9
Türev Süreklilik İlişkisi	12
Soldan ve Sağdan Türev	14
Türev Alma Kuralları.....	16
İki Fonksiyonun Toplamının ve Farkının Türevi	21
İki Fonksiyonun Çarpımının ve Bölümünün Türevi	25
Bileşke Fonksiyonun Türevi.....	30
Zincir Kuralı	32
Parçalı Fonksiyonun Türevi	34
Mutlak Değer Fonksiyonunun Türevi.....	36
İkinci Mertebeden Türev	39
Türev Alma Kuralları Testleri.....	41

TÜREV UYGULAMALARI

Türevin Geometrik Yorumu	71
Artan ve Azalan Fonksiyonlar	93
Ekstremum Noktaları	105
Maksimum ve Minimum Problemleri.....	116
Polinom ve Türev İlişkisi	141
Türev Uygulamaları Testleri	147

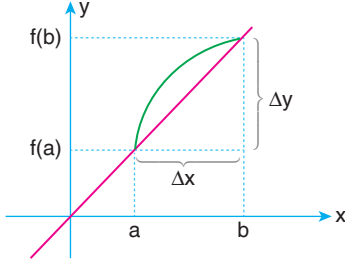


ORTALAMA DEĞİŞİM ORANI

$[a, b]$ aralığında tanımlanmış sürekli bir $y = f(x)$ fonksiyonunun $[a, b]$ aralığındaki ortalama değişim oranı (hızı) $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ olarak tanımlıdır.

Ortalama değişim oranı, x teki 1 birimlik değişime y de ortalama kaç birimlik değişimin denk geldiğini gösterir.

Ortalama değişim hızı $(a, f(a))$ ve $(b, f(b))$ noktalarından (verilen aralıkta fonksiyonun grafiğinin uç noktalarından) geçen doğrunun eğimini verir.



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

HIZLI BİLGİ

$y = mx + n$ doğrusal fonksiyonunun $[a, b]$ aralığındaki ortalama değişim oranı m dir. Yani $y = mx + n$ doğrusunun eğimine eşittir.

BKS 1

$$f(x) = 2x + 4$$

fonksiyonunun $[-1, 2]$ aralığındaki ortalama değişim oranı kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm

$y = f(x)$ fonksiyonunun $[a, b]$ aralığındaki ortalama değişim oranı $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ dir.

$$f(2) = 2 \cdot 2 + 4 = 8$$

$$f(-1) = 2 \cdot (-1) + 4 = 2$$

$$\frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{8 - 2}{2 + 1} = \frac{6}{3} = 2 \text{ bulunur.}$$

CEVAP: B

BKS 2

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere, $y = f(x)$ doğrusal fonksiyonunun ortalama değişim oranı 2 dir.

Buna göre, $f(7) - f(3)$ farkı kaçtır?

- A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

Çözüm

$y = f(x)$ fonksiyonunun $[a, b]$ aralığındaki ortalama değişim hızı $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ olduğundan

$$\frac{f(7) - f(3)}{7 - 3} = 2$$

$$f(7) - f(3) = 8 \text{ olur.}$$

Pratik Çözüm

Doğrusal fonksiyonun ortalama değişim oranı eğimine eşittir. O hâlde n gerçel sayı olmak üzere $f(x) = 2x + n$ şeklindedir.

$$\left. \begin{array}{l} f(7) = 14 + n \\ f(3) = 6 + n \end{array} \right\} f(7) - f(3) = 8 \text{ olur.}$$

CEVAP: C

BKS 3

$a = b - 3$ olmak üzere $f(x) = x^2 + 4$ fonksiyonunun $[a, b]$ aralığındaki ortalama değişim hızı 5 tir.

Buna göre, $a + b$ toplamı kaçtır?

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Çözüm

$$a = b - 3 \Rightarrow b = a + 3 \text{ tür.}$$

$y = f(x)$ fonksiyonunun $[a, b]$ aralığındaki ortalama

$$\text{değişim oranı } \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ dir.}$$

Ayrıca $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ dir.

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 5 \Rightarrow \frac{f(a + 3) - f(a)}{a + 3 - a} = 5$$

$$\Rightarrow \frac{(a + 3)^2 + 4 - a^2 - 4}{3} = 5$$

$$\Rightarrow a^2 + 6a + 9 - a^2 = 15$$

$$\Rightarrow 6a = 6$$

$$\Rightarrow a = 1 \text{ olur.}$$

$b = a + 3$ olduğundan $a + b = 1 + 4 = 5$ olur.

CEVAP: C

BKS 4

2019 yılı Aralık ayının 12 sinde Çin'in Vuhan şehrinde ilk tanısı konulan Koronavirüs vakası kısa bir sürede başta Çin daha sonra Avrupa, Kuzey Amerika ve Asya - Pasifik'teki çeşitli ülkelerde görülmeye başlamıştır.

Aşağıdaki tabloda 2020 yılı Şubat ayının bazı günlerinde Dünya genelindeki vaka sayıları gösterilmiştir.

Şubat 2020			
Gün	9	15	27
VAKA SAYISI	37500	77000	81800

Buna göre,

- I. Şubat ayının 9 ile 15 i arasında koronavirüs vaka sayısının günlük ortalama artış hızı 6500 den fazladır.
- II. Şubat ayının 9 ile 27 si arasında koronavirüs vaka sayısının günlük ortalama artış hızı 2400 dür.
- III. Şubat ayının 15 ile 27 si arasında koronavirüs vaka sayısının günlük ortalama artış hızı 400 dür.

yargılarından hangileri doğrudur?

- A) Yalnız I B) I ve II C) I ve III
D) Yalnız III E) II ve III

Çözüm

Şubat ayının a ile b günleri arasında vakanın günlük ortalama artış hızı,

$$\frac{b \text{ günündeki vaka sayısı} - a \text{ günündeki vaka sayısı}}{b - a} \text{ dir.}$$

9 ile 15 i arasındaki vaka sayısının günlük ortalama artış hızı

$$\frac{77000 - 37500}{15 - 9} = \frac{39500}{6} = 6583,3 > 6500$$

9 ile 27 si arasındaki vaka sayısının günlük ortalama artış hızı

$$\frac{81800 - 37500}{27 - 9} = \frac{44300}{18} = 2461,1 > 2400$$

15 ile 27 si arasındaki vaka sayısının günlük ortalama artış hızı

$$\frac{81800 - 77000}{27 - 15} = \frac{4800}{12} = 400 \text{ dür.}$$

CEVAP: C

ANLIK DEĞİŞİM ORANI

$y = f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ apsisli noktasındaki anlık değişim oranı $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ ile bulunur.

BKS 5

$f(x) = x^2$ fonksiyonunun $x = 1$ apsisli noktasındaki anlık değişim oranı kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm

$y = f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ apsisli noktasındaki anlık değişim oranı $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ dir.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2 \text{ olur.} \end{aligned}$$

CEVAP: B

BKS 6

$$f(x) = 2x + 1$$

fonksiyonunun $x = 3$ apsisli noktasındaki anlık değişim oranı kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 1 D) 2 E) 3

Çözüm

$y = f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ apsisli noktasındaki anlık değişim oranı

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ dir.}$$

Dolayısıyla $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$ isteniyor.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x + 1 - (2 \cdot 3 + 1)}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x - 6}{x - 3} \\ &= 2 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Pratik Çözüm

$y = mx + n$ doğrusal fonksiyonunun $x = a$ apsisli noktasındaki anlık değişim oranı m olduğundan $y = 2x + 1$ doğrusunun $x = 3$ apsisli noktasındaki anlık değişim oranı 2 dir.

CEVAP: D

BKS 7

$f(x) = x^2 - x + 1$ fonksiyonunun $x = 1$ apsisli noktasındaki anlık değişim oranı kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 1 D) 2 E) 3

Çözüm

$y = f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ apsisli noktasındaki anlık değişim oranı

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ dir.}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x + 1 - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x - 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} x = 1 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

CEVAP: C

1. $y = 3x + 4$

fonksiyonunun $[1, 4]$ aralığındaki ortalama değişim oranı a , $x = 1$ apsisli noktasındaki anlık değişim oranı b dir.

Buna göre, $a + b$ toplamı kaçtır?

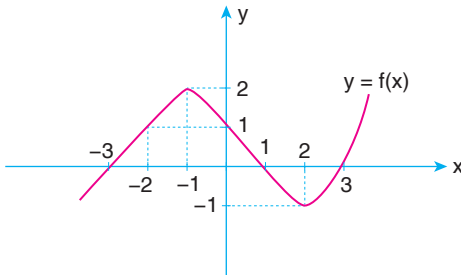
- A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

2. $f(x) = 2\sin x + \cos x$

fonksiyonunun $[0, \pi]$ aralığındaki ortalama değişim oranı kaçtır?

- A) $\frac{2}{\pi}$ B) $\frac{\pi}{2}$ C) $-\frac{2}{\pi}$ D) $-\frac{\pi}{2}$ E) $\frac{1}{\pi}$

3. Aşağıda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Buna göre, $y = f(x)$ fonksiyonunun $[-2, 2]$ aralığındaki ortalama değişim oranı kaçtır?

- A) $-\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $-\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{2}$ E) 1

4. $y = x^3 + 6x$

fonksiyonunun $1 \leq x \leq 4$ aralığındaki ortalama değişim oranı kaçtır?

- A) 15 B) 18 C) 21 D) 24 E) 27

5. $f(x) = x^2 + x - 6$

fonksiyonunun aşağıda verilen aralıkların hangisinde ortalama değişim oranı negatiftir?

- A) $[1, 2]$ B) $[-1, 3]$ C) $[0, 2]$
D) $[-4, -1]$ E) $[3, 5]$

6. Başlangıçta Özgür'ün kanına 5 miligram ilaç enjekte ediliyor. Kandaki ilacın günlük ortalama değişim hızı $-\frac{1}{4}$ tür.

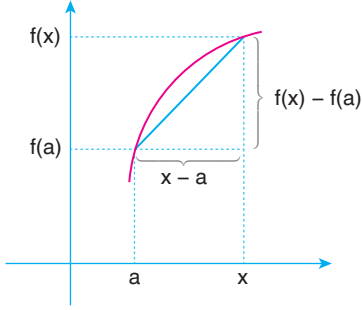
Buna göre, 12. günün sonunda Özgür'ün kanında kaç miligram ilaç kalır?

- A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) 2 D) 4 E) $\frac{1}{4}$

TÜREVİN TANIMI

$y = f(x)$ fonksiyonu $x = a$ apsisi noktada sürekli olmak üzere, $y = f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ apsisi noktasındaki anlık değişim oranına **türev** denir.

Yani $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ limiti varsa bu limit değerine $y = f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ apsisi noktasındaki türevi denir ve $x = a$ apsisi noktasındaki türevi $f'(a) = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=a}$ ile gösterilir.



HIZLI BİLGİ

m ve n birer gerçel sayı olmak üzere, $f(x) = mx + n$ fonksiyonunun $x = x_0$ apsisi noktasındaki anlık değişim oranı m dir.

$x - a = h$ dersek $x = a + h$ olur.

$x \rightarrow a$ iken $h \rightarrow 0$ olduğundan $y = f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ apsisi noktasındaki türevi

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = f'(a) \text{ şeklinde gösterilir.}$$

$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$ limiti ile $y = f(x)$ fonksiyonunun türevi bulunabilir.

$y = f(x)$ fonksiyonunun türevi $f'(x)$, $\frac{df(x)}{dx}$ ya da $\frac{dy}{dx}$ ile gösterilir.

BKS 1

$y = f(x)$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h}$$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $f'(2)$ B) $f(2)$ C) 1 D) 2 E) 0

Çözüm

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \text{ ile gösterilir.}$$

Bu eşitlikte x yerine 2 yazılırsa

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = f'(2) \text{ elde edilir.}$$

CEVAP: A

HIZLI BİLGİ

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + ah) - f(x)}{h} = a \cdot f'(x) \text{ olur.}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + ah) - f(x)}{bh} = \frac{a}{b} \cdot f'(x) \text{ olur.}$$

BKS 2

$y = f(x)$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - 5}{h} = 1 \text{ dir.}$$

Buna göre,

I. $f(2) = 5$

II. $f'(2) = 1$

III. $f(0) = 1$

yargılarından hangileri doğrudur?

- A) Yalnız I B) I ve II C) I ve III
D) II ve III E) I, II ve III

Çözüm

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - 5}{h} = 1$ olduğundan $f'(2) = 1$ ve $f(2) = 5$ olmalıdır.

CEVAP: B

BKS 3

$y = f(x)$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+3h) - f(x)}{h}$$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $f'(x)$ B) $3f'(x)$ C) 3
D) $f(x)$ E) $3f(x)$

Çözüm

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+3h) - f(x)}{h}$ ifadesinde

$t = 3h$ dönüşümü yapalım.

$$t = 3h \rightarrow h = \frac{t}{3}$$

Bu durumda verilen ifade

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{\frac{t}{3}} = \lim_{t \rightarrow 0} 3 \cdot \frac{f(x+t) - f(x)}{t} = 3f'(x)$$

olur.

CEVAP: B

BKS 4

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3) \dots (x-10)$$

fonksiyonunun $x = 1$ apsisli noktasındaki türevinin değeri kaçtır?

- A) 10 B) 9! C) -9!
D) -10! E) 10!

Çözüm

$$f(1) = 0$$

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)(x-3) \dots (x-10) - 0}{x-1}$$

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)(x-3) \dots (x-10)}{x-1}$$

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} (x-2)(x-3)(x-4) \dots (x-10)$$

$$f'(1) = (-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \dots (-9)$$

$$= -9! \text{ bulunur.}$$

CEVAP: C

» TÜREVİN TANIMI

1. $f(0) = 0$ olmak üzere,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $f'(x)$ B) $f'(0)$ C) $f(0)$
D) $-f'(0)$ E) $-f'(x)$

2. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x+h)}{4 \cdot h}$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{f'(x)}{4}$ B) $f'(x)$ C) $\frac{-f'(x)}{4}$
D) $-f'(x)$ E) $f'(4)$

3. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{4x - 12}$

işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{f'(x)}{4}$ B) $f'(3)$ C) $\frac{f'(3)}{4}$
D) $-f'(4)$ E) $\frac{f'(4)}{3}$

4. $y = f(x)$ sürekli fonksiyon ve $f(2) \neq 0$ olmak üzere,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+3h) - f(2)}{h} = f(2) \text{ dir.}$$

Buna göre, $\frac{f(2)}{f'(2)}$ oranı kaçtır?

- A) $\frac{1}{3}$ B) 1 C) 2 D) $\frac{1}{2}$ E) 3

5. a ve b sıfırdan farklı gerçel sayılar, $y = f(x)$ sürekli fonksiyon,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+ah) - f(x)}{bh} = f'(x) \text{ tir.}$$

Buna göre, a ile b arasındaki ilişki aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $a + b = 0$ B) $a \cdot b = 1$ C) $a \cdot b = -1$
D) $a = |b|$ E) $a = b$

H
I
Z
V
E
R
E
N
K

6. Gerçel sayılarda tanımlı bir fonksiyonunda her x ve y gerçel sayıları için $f(x+y) = f(x) + f(y) + 3xy$ eşitliği sağlanıyor.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = -5 \text{ olduğuna göre, } f'(2) \text{ kaçtır?}$$

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

TÜREV VE SÜREKLİLİK İLİŞKİSİ

$y = f(x)$ fonksiyonunun bir noktada türevli olabilmesi için f fonksiyonunun o noktada,

1. Sürekli olması gerekir.
2. Sağdan ve soldan türevlerinin birbirine eşit olması gerekir.

HIZLI BİLGİ

Fonksiyonun tanımsız olduğu ve süreksiz olduğu noktalarda türevi yoktur. Sürekli olduğu bazı noktalarda da türevi yoktur. Ayrıca tanımlı olabileceği en geniş aralığın uç noktalarında türevi yoktur.

BKS 1

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4}$$

fonksiyonunun türevsiz olduğu noktaların apsilerinin kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) {2} B) {-2, 2} C) {-1, 2}
D) {-2, 1} E) {-2}

Çözüm

Bir fonksiyonun tanımsız olduğu x değerlerinde (noktalarında) türev yoktur.

$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4}$ fonksiyonu $x = 2$ ve $x = -2$ apsisli noktalarda tanımsız olup bu noktalarda türev yoktur.

CEVAP: B

BKS 2

$$f(x) = \frac{x^2 + 4}{x^2 + mx + 4}$$

fonksiyonu tüm gerçel sayılar kümesinde türevlenebilirdir.

Buna göre, m nin alabileceği en geniş değer aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) (-4, 4) B) (-4, 4] C) [-4, 4]
D) (0, 4) E) [0, 4]

Çözüm

a , b ve c birer gerçel sayı olmak üzere

$$f(x) = \frac{g(x)}{ax^2 + bx + c}$$
 şeklindeki bir fonksiyonun

tüm gerçel sayılar kümesinde türevi varsa $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin gerçel sayı kökü yoktur.

Yani $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ dır.

$$x^2 + mx + 4 = 0 \Rightarrow m^2 - 4 \cdot 4 < 0$$

$$\Rightarrow m^2 < 16$$

$$\Rightarrow -4 < m < 4 \text{ olur.}$$

CEVAP: A

BKS 3

m bir gerçel sayı olmak üzere $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + m}$ fonksiyonu veriliyor.

$y = f(x)$ fonksiyonunun tüm gerçel sayılarda türevi olduğuna göre, m aşağıdakilerden hangisi olamaz?

- A) $\frac{17}{2}$ B) $\frac{23}{2}$ C) $\frac{19}{2}$ D) 10 E) $\frac{21}{2}$

Çözüm

a , b ve c birer gerçel sayı olmak üzere

$f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ fonksiyonunun tüm gerçel sayılar kümesinde türevinin olabilmesi için $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin gerçel sayı kökünün olmaması gerekir.

Yani $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ olmalıdır.

$$36 - 4m < 0$$

$$36 < 4m$$

$$9 < m \text{ dir.}$$

Dolayısıyla $m = \frac{17}{2}$ olamaz.

CEVAP: A

HIZLI BİLGİ

Grafikte türevin varlığı incelenirken, tanımsız noktalarda, sivri noktalarda ve süreksiz olan noktalarda türev yoktur.

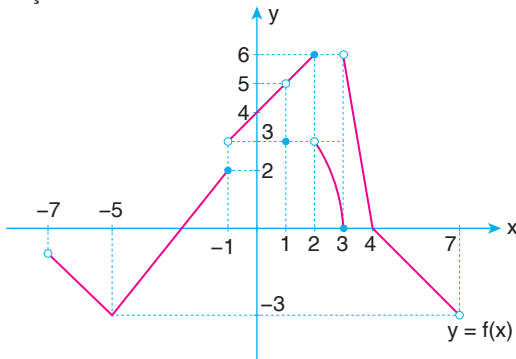
Yani grafik sorularında türevi olmayan noktalar incelenirken;



gibi yerler aranmalıdır.

BKS 4

Aşağıda $y = f(x)$ fonksiyonunun $(-7, 7)$ aralığında grafiği verilmiştir.



Buna göre, f fonksiyonunun $(-7, 7)$ aralığında kaç farklı tam sayı apsisi noktada türevi yoktur?

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Çözüm

$x = -5$, $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ ve $x = 4$

apsisli noktalarda türev yoktur.

CEVAP: D

SOLDAN VE SAĞDAN TÜREV

f fonksiyonu $x = a$ apsisli noktada sürekli olmak üzere,

- $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ limiti bir gerçel sayıya eşit ise bu değere f fonksiyonunun $x = a$ apsisli noktasındaki **soldan türevi** denir ve $f'(a^-)$ şeklinde gösterilir.
- $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ limiti bir gerçel sayıya eşit ise bu değere f fonksiyonunun $x = a$ apsisli noktasındaki **sağdan türevi** denir ve $f'(a^+)$ şeklinde gösterilir.
- $x = a$ apsisli noktada f fonksiyonu türevli olması için f fonksiyonunun $x = a$ apsisli noktada soldan ve sağdan türevlerinin eşit olması gerekir. Yani $f'(a^-) = f'(a^+)$ olmalıdır.

BKS 5

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 1 \\ 3x^2 - 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

fonksiyonu tanımlanıyor.

Buna göre, f fonksiyonunun $x = 1$ apsisli noktadaki türevi varsa değeri kaçtır?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 0 E) Yoktur

Çözüm

$$\begin{aligned} f(1^-) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 1 - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = 2 \text{ olur.} \end{aligned}$$

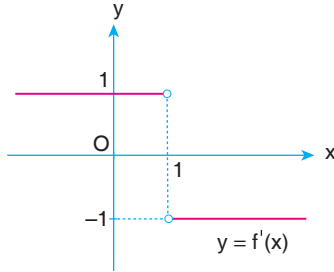
$$\begin{aligned} f(1^+) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x^2 - 1 - 2}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3(x^2 - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3(x + 1) \cdot (x - 1)}{x - 1} = 6 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

$f(1^+)$ ve $f(1^-)$ değerleri eşit değildir. Dolayısıyla f fonksiyonunun $x = 1$ apsisli noktada türevi yoktur.

CEVAP: E

BKS 6

Aşağıda $y = f(x)$ fonksiyonunun birinci türevinin grafiği verilmiştir.



Buna göre,

I. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -1$ dir.

II. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 1$ dir.

III. $y = f(x)$ fonksiyonu $x = 1$ apsisli noktada sürekli dir.

yargılarından hangileri daima doğrudur?

- A) Yalnız I B) I ve II C) I ve III
D) II ve III E) I, II ve III

Çözüm

f nin $x = 1$ deki sağdan türevi -1 soldan türevi 1 dir. (I ve II doğru)

Dolayısıyla, f nin $x = 1$ de türevi yoktur.

Ancak, f nin bu noktada sürekli olup olmadığını

bilemeyiz.

CEVAP: B

» TÜREV VE SÜREKLİLİK İLİŞKİSİ – SOLDAN VE SAĞDAN TÜREV

1. $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu tanımlanıyor.

Buna göre,

- I. f fonksiyonu (a, b) aralığında türevli ise süreklidir.
- II. f fonksiyonu (a, b) aralığında sürekli ise türevlidir.
- III. f fonksiyonu (a, b) aralığında sürekli değilse türevli değildir.

yargılarından hangileri daima doğrudur?

- A) Yalnız I B) Yalnız II C) I ve II
D) II ve III E) I ve III

2. m bir gerçel sayı olmak üzere,

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x^2 + mx + 2}$$

fonksiyonu her gerçel sayı için türevlenebilir.

Buna göre, m nin alabileceği kaç farklı tam sayı değeri vardır?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

3. a, b ve c sıfırdan farklı bir gerçel sayı olmak üzere,

$$f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$$

fonksiyonunun her gerçel sayı için türevi vardır.

Buna göre,

- I. $a > 0$
- II. $b^2 - 4ac \leq 0$
- III. $a \cdot c < 0$

eşitsizliklerinden hangileri daima doğrudur?

- A) Yalnız I B) I ve II C) I ve III
D) II ve III E) I, II ve III

4. $a \neq 0$ ve a ile c birer gerçel sayı olmak üzere,

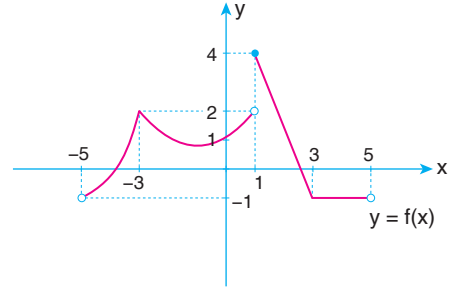
$$f(x) = \frac{2x + 1}{ax^2 + 6x + c}$$

fonksiyonunun tüm gerçel sayılar kümesinde türevi vardır.

Buna göre, $a \cdot c$ çarpımı aşağıdakilerden hangisi olamaz?

- A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 16

5. Aşağıda $(-5, 5)$ aralığında tanımlı olan $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Buna göre, $y = f(x)$ fonksiyonunun $(-5, 5)$ aralığında türevsiz olduğu noktaların apsisi toplamı kaçtır?

- A) 4 B) 10 C) -2 D) -3 E) 1

6. $y = u(x)$ ve $y = v(x)$ gerçel sayılarda türevlenebilir fonksiyonlar ve m bir gerçel sayı olmak üzere,

$$f(x) = \begin{cases} u(x), & x < 1 \\ m, & x = 1 \\ v(x), & x > 1 \end{cases}$$

fonksiyonu tanımlanıyor. f fonksiyonunun $x = 1$ apsisli noktada türevi vardır.

Buna göre,

- I. $u'(1) = v'(1)$
- II. $u(1) = v(1)$
- III. $f'(1) = m$

eşitliklerinden hangileri daima doğrudur?

- A) Yalnız I B) I ve II C) I ve III
D) II ve III E) I, II ve III

TÜREV ALMA KURALLARI

n ve c gerçel sayı olmak üzere,

✓ $f(x) = x^n$ ise $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

Yani x^n şeklindeki bir fonksiyonun türevi alınırken kuvvet bir azaltılıp n sayısı katsayı yapılır.

✓ $f(x) = c$ ise $f'(x) = 0$

Yani sabit fonksiyonun türevi sıfırdır.

✓ $f(x) = c \cdot x^n$ ise $f'(x) = c \cdot n \cdot x^{n-1}$ dir.

Örneğin;

• $f(x) = x^5$ fonksiyonunun türevi $f'(x) = 5x^4$ tür.

• $g(x) = 5$ fonksiyonunun türevi $g'(x) = 0$ dır.

• $h(x) = 2x^4$ fonksiyonunun türevi

$h'(x) = 2 \cdot 4 \cdot x^3 = 8x^3$ tür.

BKS 1

Aşağıda verilen fonksiyonların türevlerini bulalım.

- a) $f(x) = x^4$ b) $f(x) = \frac{1}{x}$ c) $f(x) = \sqrt{x}$
 d) $f(x) = \sqrt{2}$ e) $f(x) = \sqrt{x^3}$

Cözüm

a) $f(x) = x^4 \Rightarrow f'(x) = 4 \cdot x^3$

b) $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f(x) = x^{-1} \Rightarrow f'(x) = (-1) \cdot x^{-2}$
 $\Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

c) $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonu $f(x) = x^{1/2}$ şeklinde üslü fonksiyona çevrilip türev alınabilir.

$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f(x) = x^{\frac{1}{2}}$
 $\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$
 $\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

d) $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ olduğundan $f(x) = \sqrt{2}$ fonksiyonu sabit fonksiyondur.

Dolayısıyla $f'(x) = 0$ dır.

e) $f(x) = \sqrt{x^3}$ fonksiyonu $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ şeklinde üslü fonksiyona çevrilip türev alınabilir.

$f(x) = \sqrt{x^3} \Rightarrow f(x) = x^{\frac{3}{2}}$
 $\Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$
 $\Rightarrow f'(x) = \frac{3\sqrt{x}}{2}$

BKS 2

$f(x) = 4 \cdot x^{m-1}$ ve $f'(1) = -20$

olduğuna göre, m aşağıdakilerden hangisidir?

- A) -5 B) -4 C) -6 D) -3 E) -2

Cözüm

$f(x) = 4 \cdot x^{m-1} \Rightarrow f'(x) = 4 \cdot (m-1) \cdot x^{m-2}$

$\Rightarrow f'(1) = -20$ olduğundan

$-20 = 4 \cdot (m-1) \cdot 1^{m-2}$

$m-1 = -5$

$m = -4$ bulunur.

CEVAP: B

BKS 3

$$f(x) = \frac{4x}{\sqrt{x}}$$

fonksiyonunun türevi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{2}{\sqrt{x}}$ B) $2\sqrt{x}$ C) $\frac{4}{\sqrt{x}}$ D) $4\sqrt{x}$ E) $\frac{1}{\sqrt{x}}$

Çözüm

$f(x) = \frac{4x}{\sqrt{x}}$ fonksiyonunu düzenleyelim.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4x}{\sqrt{x}} \\ &= 4\sqrt{x} \\ &= 4x^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4 \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \\ &= 2x^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{x}} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

CEVAP: A

BKS 4

n bir gerçel sayı olmak üzere, $f(x) = 3 \cdot x^n$ fonksiyonu tanımlanıyor.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{1 - x} = -6 \text{ dir.}$$

Buna göre, n aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 3 B) 2 C) -3 D) -2 E) 1

Çözüm

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{1 - x} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{-(x - 1)} \\ &= -f'(1) = -6 \\ &\Rightarrow f'(1) = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= 3 \cdot x^n \Rightarrow f'(x) = 3 \cdot n \cdot x^{n-1} \\ &\Rightarrow 3 \cdot n \cdot x^{n-1} \Big|_{x=1} = 6 \\ &\Rightarrow 3 \cdot n = 6 \\ &\Rightarrow n = 2 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

CEVAP: B

BKS 5

a ve n birer pozitif gerçel sayı olmak üzere,

$$f(x) = a \cdot x^n$$

fonksiyonu tanımlanıyor.

$y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği $(1, 2)$ noktasından geçmektedir.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 20$$

olduğuna göre, $n + a$ toplamı kaçtır?

- A) 9 B) 11 C) 12 D) 18 E) 21

Çözüm

$f(1) = 2 \Rightarrow a \cdot 1^n = 2 \Rightarrow a = 2$ dir.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1)$$

$$f'(1) = 20 \text{ dir.}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= a \cdot x^n \Rightarrow f'(x) = a \cdot n \cdot x^{n-1} \\ &\Rightarrow f'(1) = a \cdot n = 20 \\ &\Rightarrow n = 10 \text{ dur.} \end{aligned}$$

$$n + a = 10 + 2 = 12 \text{ bulunur.}$$

CEVAP: C

BKS 6

$f(x) = x^3 + 2x - 5$ olmak üzere

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm

$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ eşitliğinde x yerine -1 yazılırsa

$f'(-1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$ elde edilir. Dolayısıyla soruda $f'(-1)$ in değeri soruluyor.

$$f'(x) = 3x^2 + 2$$

$$f'(-1) = 3(-1)^2 + 2 = 5 \text{ dir.}$$

CEVAP: D

BKS 7

$f(x) = 2x^2 - 3x - 1$ olmak üzere

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

- A) -8 B) -10 C) -11 D) -12 E) -13

Çözüm

$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ eşitliğinde a yerine -2 yazılırsa

$f'(-2) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2}$ elde edilir. Dolayısıyla soruda

$f'(-2)$ nin değeri soruluyor.

$$f'(x) = 4x - 3$$

$$f'(-2) = 4(-2) - 3 = -11 \text{ dir.}$$

CEVAP: C

BKS 8

$f(x) = 2x^4 - x^3 + 5x - 1$ olmak üzere

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+3h) - f(1-4h)}{h}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

- A) 70 B) 65 C) 60 D) 55 E) 50

Çözüm

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+3h) - f(1-4h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+3h) - f(1) + f(1) - f(1-4h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+3h) - f(1)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-4h) - f(1)}{h}$$

$$= \frac{3 \cdot f'(1)}{3} - \frac{-4 \cdot f'(1)}{-4}$$

$$= 3f'(1) + 4f'(1) = 7f'(1)$$

$$f'(x) = 8x^3 - 3x^2 + 5$$

$$f'(1) = 8 - 3 + 5 = 10$$

$$7f'(1) = 7 \cdot 10 = 70$$

CEVAP: A

» TÜREV ALMA KURALLARI

1. $f(x) = e^x$ fonksiyonu tanımlanıyor.

Buna göre, $f'(1)$ değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\pi \cdot e$ B) $\pi \cdot e^{\pi-1}$ C) $e \cdot \pi^e$
D) 0 E) 1

2. n pozitif bir tam sayı olmak üzere

$$f(x) = 2 + 4 + 6 + \dots + 2n$$

olarak tanımlanıyor.

Buna göre, $f'(5)$ değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 0 B) $2n$ C) n^2
D) $n(n+1)$ E) 5

3. $f(x) = \frac{1}{x}$ ve $g(x) = 4 \cdot x^3$

fonksiyonları tanımlanıyor.

Buna göre, $f'(1) + g'(-1)$ değeri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) -13 B) -11 C) 11
D) 12 E) 13

4. $y = \sqrt{a}$ fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, $\frac{dy}{dx}$ aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $\frac{1}{2\sqrt{a}}$ B) 0 C) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ D) 1 E) $\frac{1}{2}$

5. n , 0 ve 1 den farklı gerçel sayılar olmak üzere,

$$f(x) = x^n \text{ fonksiyonu veriliyor.}$$

Buna göre, $f'(a) = f(a)$ şartını sağlayan a değerlerinin toplamının n cinsinden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $2n+1$ B) n C) $2n$
D) $n-1$ E) $n+1$

6. $f(x) = \frac{1}{x}$ ve $g(x) = \sqrt{x}$

fonksiyonları veriliyor.

Buna göre, $f'(1) + g'(4)$ toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $-\frac{3}{4}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{5}{4}$ E) $\frac{1}{2}$